

University of Groningen

## Some mathematical results on three-way component analysis

Tendeiro, Jorge

**IMPORTANT NOTE:** You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

*Document Version*

Publisher's PDF, also known as Version of record

*Publication date:*

2010

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

*Citation for published version (APA):*

Tendeiro, J. (2010). *Some mathematical results on three-way component analysis*. s.n.

### Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: <https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment>.

### Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.

# Samenvatting

## (Summary in Dutch)

Onderzoekers hebben vaak te maken met gegevens die boven de gebruikelijke “gegevens  $\times$  variabelenstructuur” uitgaan. Soms bestaan de gegevens bijvoorbeeld uit matrices die op verschillende tijdstippen zijn verzameld. Gegevens met een dergelijke structuur worden *meerweggegevens* genoemd. Ze roepen de vraag op naar meerwegtechnieken.

Meerwegtechnieken vormen een natuurlijke uitbreiding van twee-wegtechnieken. De eerste bijdrage stamt uit 1927 (Hitchcock [29, 30]). In 1966 kwam Tucker [114] met een andere driewegcomponentenanalyse. In 1970 hebben Carroll and Chang [11] en Harshman [24] de methode van Hitchcock herontdekt (Hoofdstuk 2). Sindsdien is er veel nieuws bijgekomen: veel wiskundige eigenschappen van meerwegmodellen zijn aan het licht gebracht en tal van nieuwe modellen zijn geïntroduceerd.

In dit proefschrift ligt de nadruk op driewegmodellen. Een van onze doelstellingen was een beknopt overzicht te geven van enkele lineair-algebraïsche eigenschappen van driewegarrays. Ook hebben we eigenschappen bestudeerd van diverse statistische modellen voor de analyse van drieweggegevens. De eerste vijf hoofdstukken van dit proefschrift bestaan voornamelijk uit het bij elkaar brengen van resultaten die verspreid in de literatuur voorkomen. In Hoofdstuk 6 en 7 worden nieuwe resultaten naar voren gebracht.

In Hoofdstuk 1 worden grondbegrippen inzake matrices en driewegarrays geïntroduceerd. Doel is de lezers voor te bereiden op de latere hoofdstukken. Het accent ligt op ontbindingstechnieken voor matrices, zoals de eigenontbinding, de singuliere waarden-ontbinding en Principale Componentenanalyse, en op het begrip driewegar-

ray.

Hoofdstuk 2 bevat een bespreking van driewegmodellen die nader onderzocht worden. Het gaat om 3PCA (Tucker [114]), het CP-model (Carroll and Chang [11] en Harshman [24]) en het INDSCAL-model (Carroll and Chang [11]). Voor elk model wordt een aantal wiskundige formuleringen gegeven.

Hoofdstuk 3 gaat over uniciteit. Uitgelegd wordt waarom het 3PCA-model niet geïdentificeerd is, terwijl het CP-model dat normaliter wel is. Diverse uniciteitsvoorwaarden uit de literatuur worden behandeld. Daaraan worden nieuwe verkorte bewijzen voor Stelling 2 (p. 46) en Stelling 3 (p.47) toegevoegd.

In Hoofdstuk 4 worden gedegenereerde oplossingen behandeld. Uitgelegd wordt waarom gedegenereerdheid problematisch is in de context van het CP-model, en hoe het mogelijk is dat het CP-algoritme soms tot gedegenereerde oplossingen komt. Verder worden manieren besproken om gedegenereerde oplossingen te vermijden.

Het begrip “simplicity” (eenvoud) staat centraal in Hoofdstuk 5. De rotatievrijheid in 3PCA maakt het mogelijk simplicity in de kern en/of in de componentmatrices te bereiken. Transformatie van 3PCA-oplossingen naar eenvoudige vorm kan de interpretatie van de oplossing vereenvoudigen. Maar dergelijke procedures zijn ook wiskundig interessant. Met name de “typical rank” (waarschijnlijke rang) van array-formaten is veel gemakkelijker te bepalen wanneer gebruik wordt gemaakt van “simplicity transformations”.

In Hoofdstuk 6 worden nieuwe resultaten gepresenteerd inzake simplicity van driewegarrays, met name inzake arrays die uit symmetrische matrices bestaan. Voor dergelijke arrays zijn niet eerder simplicity-resultaten gevonden. Er wordt een uitgebreide analyse gegeven voor arrays waarin de symmetrische matrices van orde  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  en  $4 \times 4$  zijn. Er worden voorbeelden gegeven waarin simplicity-transformaties de bepaling van waarschijnlijke rang vereenvoudigen. Ook wordt aandacht besteed aan het bepalen van “maximal simplicity”.

In Hoofdstuk 7 worden eerste en tweede orde afgeleiden van optimalisatiefuncties voor CP en Indscal gegeven. Doel is een gereedschap te ontwikkelen waarmee we zadelpunten kunnen herkennen. Twee typen randvoorwaarden zijn daarbij in acht genomen: kolommen van lengte 1 of orthonormaliteit, in twee van de drie com-

---

ponentenmatrices. Enkele numerieke problemen die daarbij optreden (verwant aan gedegeneerdheid) worden besproken. Ter illustratie worden drie toepassingen behandeld.

